SUBJECT: $\frac{u}{y}$

أمثلة:

مثال 3: جد عامل التكميل للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(2xy + x^2 y + \frac{1}{3}y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

الحل

$$\frac{d\ln\mu}{dZ} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial Z}{\partial x} - P\frac{\partial Z}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

$$\Rightarrow \int d\ln\mu = \int dx$$

$$\ln\mu = x$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = e^x}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل:

$$e^x(2xy + x^2 y + \frac{1}{3}y^3)dx + e^x(x^2 + y^2)dy = 0$$

لإيجاد الحل العام للمعادلة الأخيرة وذلك باختيار $x_0 = y_0 = 0$

$$F = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dx \quad \text{— المعادلة [9] سابقاً}$$

$$F = \int_{0}^{x} 0\,dx + e^{x_0}\int (x^2 + y^2)dy$$

$$F = 0 + e^x(x^2 y + \frac{y^3}{3}) = c$$

حيث c ثابت اختياري ، $\boxed{F = e^x(x^2 y + \frac{y^3}{3}) = c}$ وهو الحل العام

مثال 2: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$(x^2-y^2+2x)dx + (x^2-y^2-2y)dy=0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$

الشرط غير محقق و المعادلة ليست تامة لنوجد عامل التكميل لها

$\frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q-P} = \frac{-2y-2x}{-2} = \frac{-2y-2x}{-2y-2x} = 1 \Rightarrow$

بالتكامل $\int d\ln\mu = dz = \int d(x+y)$

$\ln\mu = x+y \Rightarrow \mu = e^{x+y}$

نضرب طرفي المعادلة بـ μ عامل التكميل

$e^{x+y}(x^2-y^2-2x)dx + e^{x+y}(x^2-y^2-2y)dy = 0$

لإيجاد الحل العام للمعادلة الأخيرة نختار العلاقة [8] سابقاً :

$x_0 = y_0 = 0$

$F = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = c$

$F = \int_{0}^{x} e^{x+y}(x^2-y^2+2x)dx + \int_{0}^{y} e^{y}(-y^2-2y)dy = c$

بالتكامل بالتجزئة :

وهو الحل العام $F = e^{x+y}(x^2-y^2) - x \cdot y^2 \cdot e^{y} = c$

مثال 3: بين أنه يوجد عامل تكميل للمعادلتين التاليتين ثم أوجده :

1] $(2y^2+\frac{1}{x})dx + 2xy\,dy = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2y}{2xy} = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\int d \ln \mu = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln \mu = \ln x \overset{e \text{ طرفين}}{\Rightarrow} \mu = x$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل . $\boxed{\mu = x}$

$$(2y^2x + 1)dx + 2x^2y\,dy = 0$$

يكتب على شكل تفاضل تام لـ $d(x^2y^2)$

$$\int d(x^2 y^2) + \int dx = \int 0$$

الحل العام $\boxed{x^2 \cdot y^2 + x = c}$

مثال 4:

$$e^x dx + \left(2 + \frac{e^x}{y}\right) dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \;;\; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{e^x}{y}$$

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \frac{\frac{e^x}{y}}{-e^x} = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \int d \ln \mu = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln \mu = \ln y \overset{e \text{ طرفين}}{\Rightarrow}$$

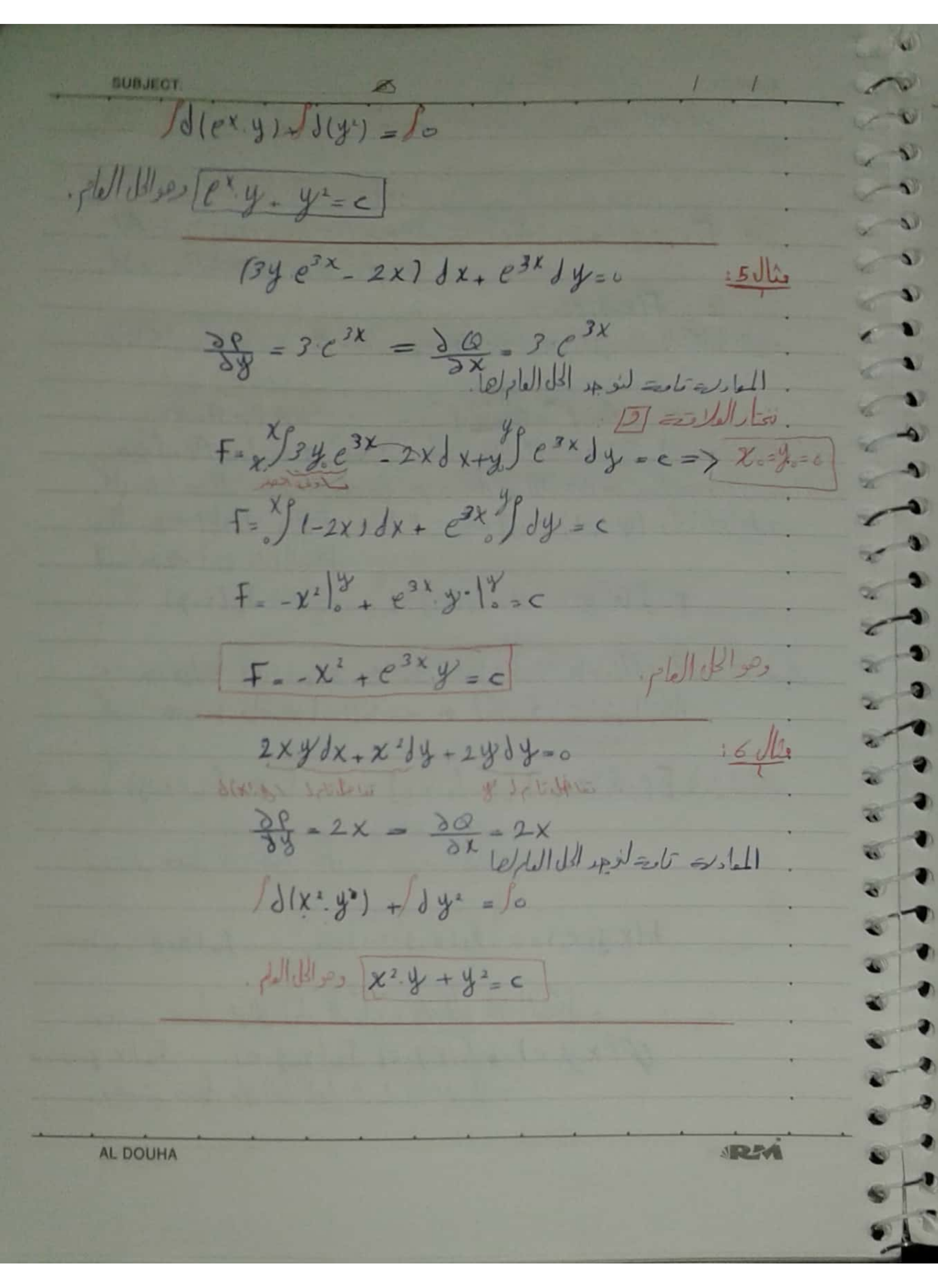
$$\boxed{\mu = y}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل $\boxed{\mu = y}$

$$y e^x dx + (2y + e^x) dy = 0$$

تفاضل تام لـ $d(e^x y)$

تفاضل تام لـ y^2



$\int d(e^x \cdot y) + \int d(y^2) = \int 0$

$\boxed{e^x \cdot y + y^2 = c}$ وهو الحل العام.

مثال 5: $(3y\,e^{3x} - 2x)\,dx + e^{3x}\,dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 3e^{3x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 3e^{3x}$

المعادلة تامة لنوجد الحل العام لها.

نختار العلاقة [2]

$F = \int_{x_0}^{x} (3y_0 e^{3x} - 2x)\,dx + \int_{y_0}^{y} e^{3x}\,dy = c \Rightarrow \boxed{x_0 = y_0 = 0}$

$F = \int_0^x (-2x)\,dx + e^{3x}\int_0^y dy = c$

$F = -x^2\big|_0^x + e^{3x}\cdot y\big|_0^y = c$

$\boxed{F = -x^2 + e^{3x}\,y = c}$ وهو الحل العام.

مثال 6: $2xy\,dx + x^2\,dy + 2y\,dy = 0$

$d(x^2 y)$ تفاضل تام … تفاضل تام لـ y^2

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$

المعادلة تامة لنوجد الحل العام لها

$\int d(x^2 \cdot y) + \int d\,y^2 = \int 0$

وهو الحل العام $\boxed{x^2 \cdot y + y^2 = c}$